Problema

- ✓ Datos

m_1, m_2, mp y g

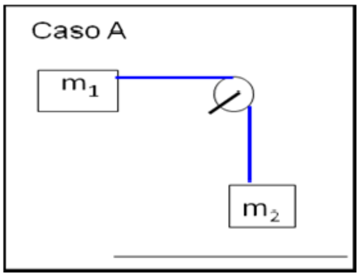
- ✓ Hipótesis:

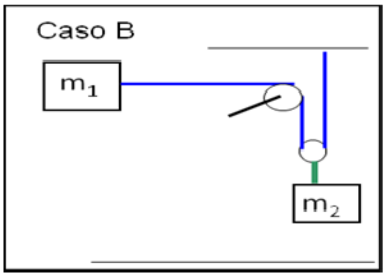
- Las poleas son ideales (sin roce y sin masa)
- Las sogas son inextensibles y de masa despreciable.
- La mesa horizontal es lisa

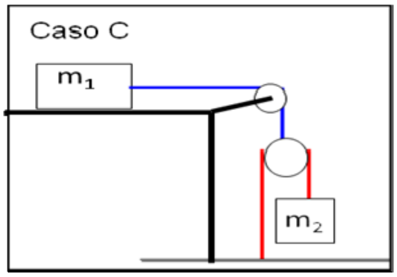
- ✓ Calcular:

-aceleraciones de las masas

-las tensiones de las cuerdas.







Mostramos un esquema de los pasos a seguir para este tipo de problemas (sirven para cualquiera de los tres dispositivos indicados y para cualquier tipo de problema que tenga sogas, poleas y masas puntuales)

Enumeramos una serie de pasos a seguir:

(1) Dibujar el diagrama de cuerpo libre (DCL)
DCL para las masas
DCL para las sogas
DCL para las sogas alrededor de las poleas móviles. Las fijas veremos como tratarlas en Cuerpo rígido.
(utilizar las leyes 1 y 3 de Newton)

Elegir el sistema coordenado más conveniente para cada cuerpo. Los sistemas coordenados de cada cuerpo son independientes, pero se suele elegirlos de manera que nos resulte sencillo relacionar luego las aceleraciones
Este paso hay que realizarlo para cada cuerpo!!!

(2) Establecer la relación entre las tensiones de las cuerdas

(3) Establecer la relación entre las aceleraciones de las masas

Forma 1 (analítica rápida "intuitiva", menos rigurosa)
Forma 2 (analítica más rigurosa)

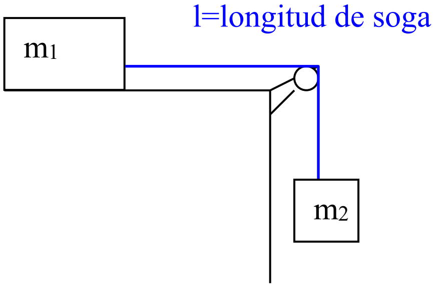
Utilizando una de estas dos formas (sólo hay que elegir 1) se puede resolver el problema, pero siempre tiene que estar bien explicada la forma que se utiliza para la resolución.

Las relaciones establecidas en los pasos (2) y(3) son relaciones que vinculan los cuerpos restringiendo el movimiento y se suelen denominar relaciones de vínculo.

Luego reemplazando lo hallado por (2) y (3) en la segunda ley de Newton para cada cuerpo se obtiene un sistema de ecuaciones tal que tenga tantas ecuaciones como incógnitas.

CASO A)

a)



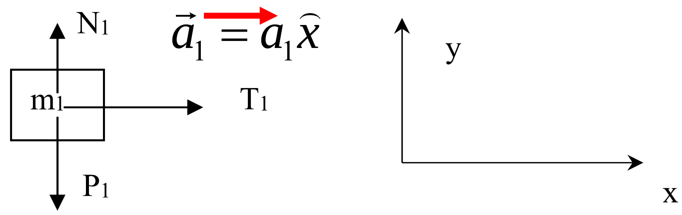
Para cada cuerpo dibujamos el DCL, elegimos un sistema de referencia fijo a Tierra y con coordenadas indicadas junto al DCL, en cada caso.

Se utiliza luego la segunda ley de Newton $\sum_{i}^{N} \vec{F}_i = m\,\vec{a}$

Para la masa 1

Elegimos el eje x en la dirección de la aceleración, de manera tal que la componente y de la aceleración sea 0 pues el cuerpo hace un MR en x

.

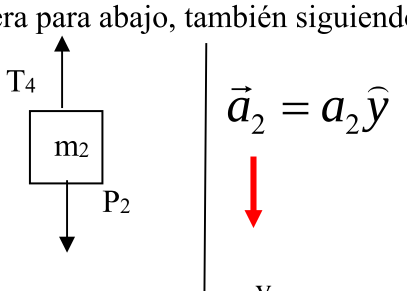


$$\hat{x}) : T_1 = m_1 a_{1x} = m_1 a_1 \quad (1)$$

$\hat{y}) : N_1 - P_1 = m_1 a_{1y} = 0$ (2) (el cuerpo no se levanta en *y*, no hay aceleración en esta coordenada)

Para la masa 2

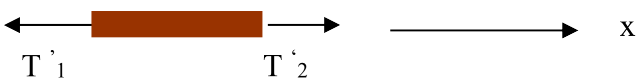
Este cuerpo acelera para abajo, también siguiendo un MR, de manera que elijo el eje y positivo para abajo



$$\hat{y}) : -T_4 + P_2 = m_2 a_2 \quad (3)$$

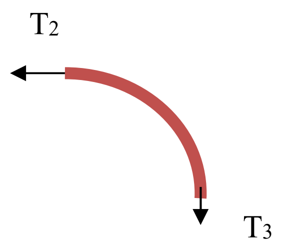
veamos que sucede con la soga

Soga tramo 1



$\hat{x}): -T_1' + T'_2 = 0$ (masa del tramo de la soga nula) de aquí se obtiene

$T_1' = T_2'$ (4)



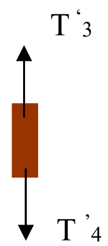
Soga alrededor de la polea

Utilizando la 3º ley de Newton, sabemos que:
$T_1 = T'_1$ por ser par de interacción (5)
y
$T_2 = T'_2$ por ser par de interacción (6)

de (4) (5) y (6) obtenemos que

$T_1 = T_2$ (7)

Para el otro tramo de la soga, en forma similar
Obtenemos que $T_3 = T_4$ (8)



Sucede lo mismo para la soga que en T´1 y T´2

¿Cómo relacionamos T_2' y T_3'?
Para la soga alrededor de la polea la tensión se mantiene igual dado que la polea es puntual
$T_2' = T_3'$ (9)
Cuando veamos CR (cuerpo rígido) aprenderemos a justificar esto. Por ahora lo usamos como lo hacíamos en el CBC, esto es decimos que si la polea es puntual y de masa despreciable vale la ecuación (9): la soga "transmite tensiones". **Veremos que no es cierto si la polea no es puntual.**

Usamos lo anterior para el paso (2) que era relacionar las tensiones volvemos a nuestro problema
Entonces obtenemos de (7), (8) y (9) que:

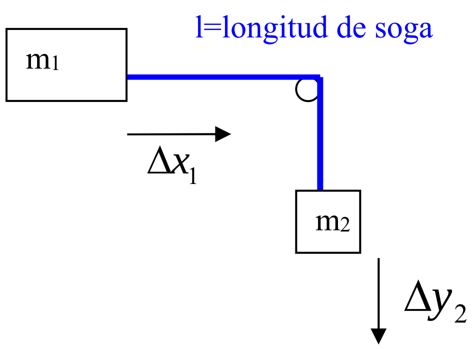
$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 \quad (9)$$

Ahora aplicamos el paso (3) para obtener la relación de las aceleraciones

<u>Relación entre las aceleraciones de las masas</u>

Forma 1 ("intuitiva")
Caso a) dispositivo con polea fija y dado que la soga es inextensible,
en el Δt en que m1 se desplaza Δx_1 hacia la derecha, m2 desciende Δy_2, ambos con igual signo pues tomamos un eje positivo en el sentido del desplazamiento para cada cuerpo, en cada caso entonces
$\Delta x_1 = \Delta y_2$, *en el mismo* Δt. *Dividiendo por* Δt *a ambos miembros, tomando el límite cuando* $\Delta t \to 0$ *y derivando nuevamente respecto de t*

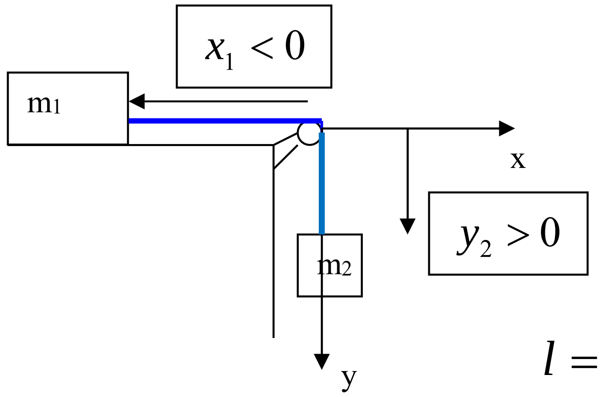
$a_{1x} = a_{2y}$ $\Rightarrow a_1 = a_2$ (10)



Forma 2 (analítica más rigurosa) midiendo segmentos de cuerda y teniendo en cuenta que la longitud total de la cuerda es constante pues es inextensible.
Caso a) sistema de coordenadas ubicado en el centro de la polea con origen en ella, el eje x en la dirección positiva hacia la derecha y para abajo

***l* es la longitud total de la soga**

a)



$$l = -x_1 + y_2$$

pues x_1 es negativa, en este caso, y la longitud de la soga es positiva, constante y es la suma de las longitudes de cada tramo. Estamos despreciando la longitud de la soga que está alrededor de la polea pues es puntual. De todas maneras la podríamos sumar como un pedazo de longitud constante que al derivar, respecto del tiempo, se va a ir.

Derivando dos veces con respecto al tiempo a ambos lados de la igualdad obtenemos: $0 = -\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2}$

$a_{1x} = a_{2y} \Rightarrow a_1 = a_2 = a$ Otra vez obtuvimos la ecuación (10)

Observación: Llamamos (10) a la relación entre las aceleraciones obtenidas por las dos formas porque obviamente son iguales (aunque obtenidas por de dos maneras diferentes). Usamos cualquiera de las dos formas para justificar la resolución. NO hace falta hacer las dos.

Para resolver el problema usamos las ecuaciones
$T_1 = m_1 a_1$
$-T_4 + P_2 = m_2 a_2$
$T_1 = T_4$
$a_1 = a_2$

Tenemos dos ecuaciones con 4 incógnitas: las dos tensiones y las dos aceleraciones, pero en este caso sencillo, renombrando a las tensiones como T y a las aceleraciones como a, el sistema se reduce a:

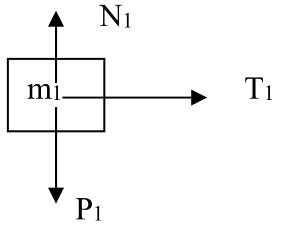
(1) $T = m_1 a$
(2) $-T + m_2 g = m_2 a$

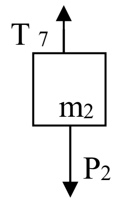
Resultados:

$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 6\frac{m}{s^2}$; *con* *g=10 m/s*^{2}

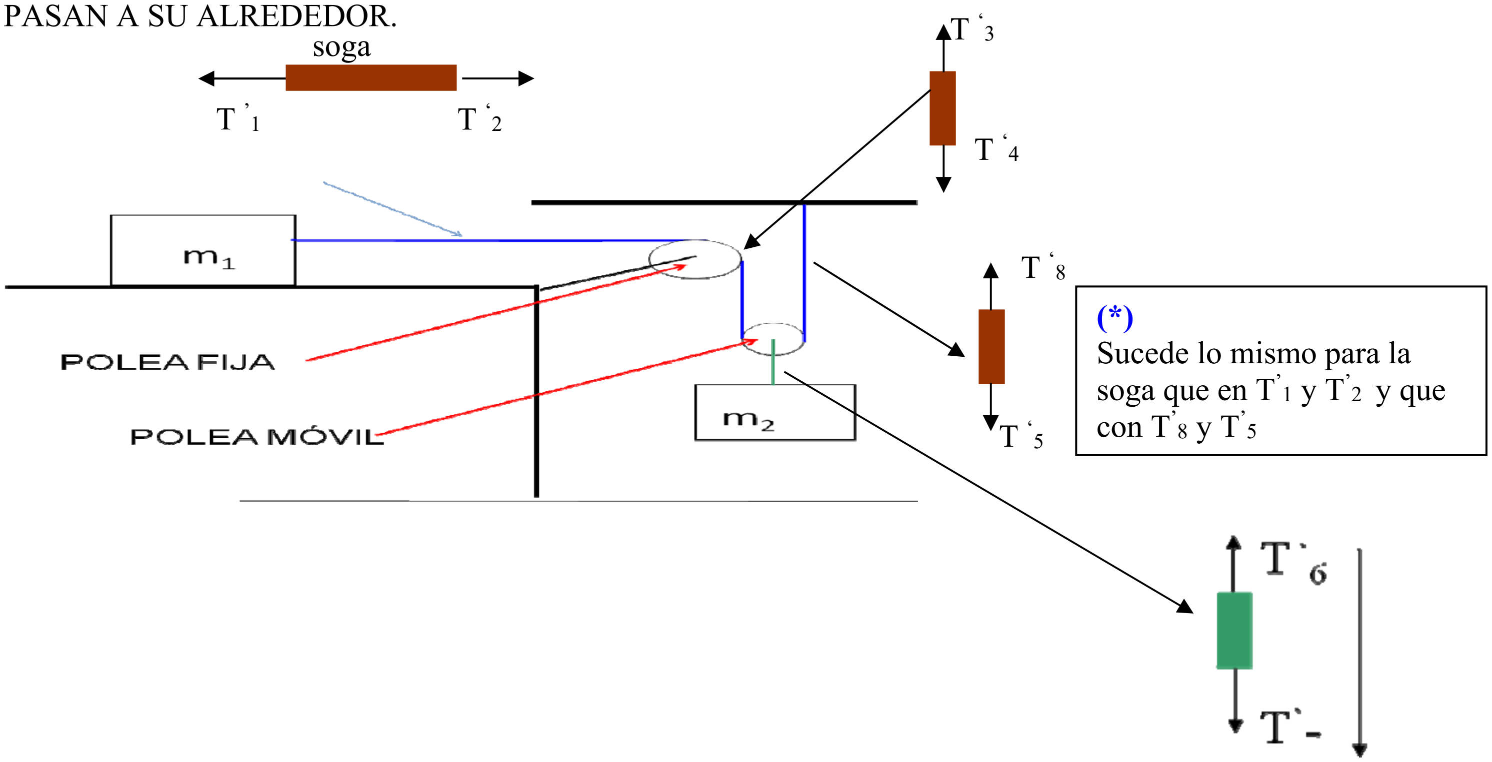
$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 24N$

Caso b) dispositivo con una polea fija y una móvil
Para este caso entonces aplicamos los mismos pasos. Elegimos los mismo ejes que elegimos en A.

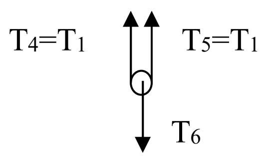




Para la cuerda que pasa alrededor de la polea fija y de la móvil ACEPTAMOS POR AHORA QUE LAS POLEAS PUNTUALES TRANSMITEN TENSIONES DE IGUAL VALOR A LAS CUERDAS QUE PASAN A SU ALREDEDOR.



Todos los tramos de la cuerda que pasa por las dos poleas tiene la misma tensión T_1
Falta encontrar la relación de esta tensión con la de la cuerda que une a m_2 al centro de la polea móvil.



Planteando la segunda ley de Newton para la polea

$T_4 + T_5 - T_6 = m_{polea} a_{polea} = 0$ masa de la polea despreciable

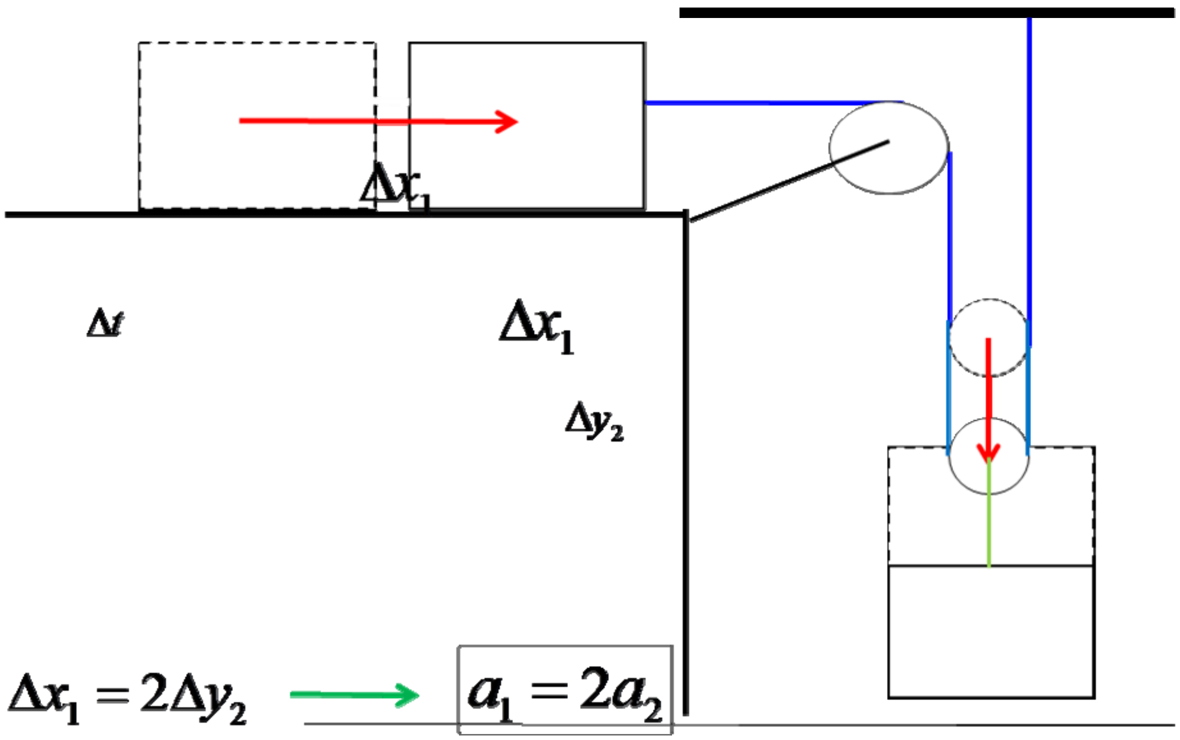
$$2T_1 = T_6$$

Como $T_6 = T_7$ por la ley de interacción, finalmente se obtiene:

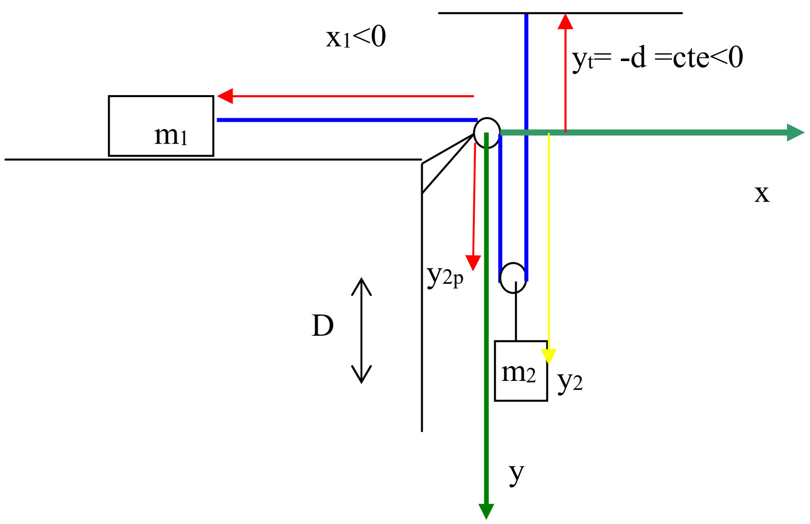
$$2T_1 = T_7$$

Para la relación entre las aceleraciones

Forma 1) (analítica rápida; "intuitiva")
En el Δt en que m_1 se desplaza Δx hacia la derecha, la polea móvil, por lo tanto m_2 también, descienden $\Delta y/2$. Esto es pues el tramo de soga que se corre al desplazarse el cuerpo 1 se distribuirá en partes iguales alrededor de la polea móvil, por lo tanto la polea móvil (y en consecuencia el cuerpo 2) bajarán la mitad de la distancia que recorre el cuerpo 1 en la horizontal. Haciendo un análisis similar al realizado en a) tenemos $a_1=2a_2$



Forma 2) (analítica más rigurosa)
Sistema de coordenadas ubicado en el centro de la polea fija con origen en ella, el eje x en la dirección positiva hacia la derecha y el eje y positivo hacia abajo. Tengamos en cuenta que la soga (azul) tiene una longitud fija l pues está sostenida desde el techo. Por lo tanto d=cte.



Masa 2 y polea móvil tienen la misma aceleración

Medimos los segmentos que forman la soga larga (L). El segmento horizontal tiene longitud $|x_1| = -x_1 > 0$ pues $x_1 < 0$

Los segmentos verticales son 2 segmentos de longitud y_{2p} cada uno, más un tramo constante de longitud d. por lo tanto la longitud total de la soga, (despreciando las pequeñas longitudes alrededor de las poleas puntuales) queda

$$L = -x_1 + 2y_{2p} + d$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$2\frac{d^2 y_{2p}}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$\Rightarrow 2a_{2p} = a_1$$

Mientras que procediendo análogamente para la soga corta (l) que conecta a la polea móvil con m_2

$$l = y_2 - y_{2p}$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$a_2 = a_{2p}$$

Finalmente, relacionando lo obtenido a partir de cada una de las sogas, se llega a:

$$a_1 = 2a_2$$

Las ecuaciones que quedan son

$T_1 = m_1 a_1$ de las leyes de Newton para el cuerpo 1

$T_7 - P_2 = m_2 a_2$ de las leyes de Newton para el cuerpo 2

$a_1 = 2a_2$ usando la relación entre las aceleraciones de las masas

$2T_1 = T_7$ usando la relación entre las tensiones

Tenemos el sistema de ecuaciones completo para resolver. Los resultados son

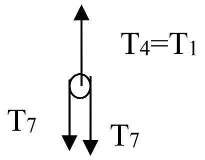
$$a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} = 5.45\frac{m}{s^2} \qquad a_2 = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2} = 2.72\frac{m}{s^2}$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{\left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right)} = 21{,}81\, N \qquad T_7 = \frac{m_1 m_2 g}{\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right)} = 43{,}63 N$$

Caso c) dispositivo con una polea fija y una móvil

Solamente vemos la relación de aceleraciones. La de tensiones en la polea móvil es similar a la anterior, lo mismo que los DCL de los cuerpos, la polea fija y los tramos de soga.

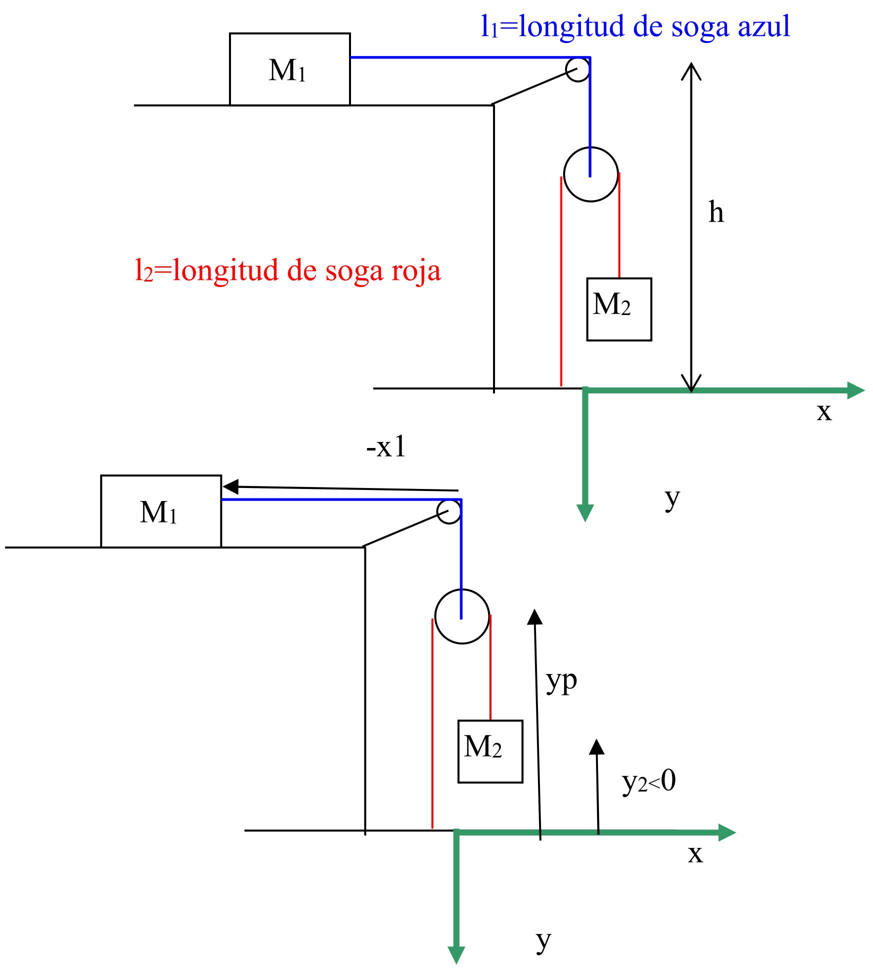
Sin embargo para la polea móvil la tensión aplicada en el cuerpo 1 es igual a la tensión que se aplica hacia arriba en el centro de la polea móvil. Las tensiones de los tramos de la soga que envuelve la polea móvil también tienen la misma tensión (por ser ambas poleas de masa despreciable)



$$T_7 + T_7 - T_1 = m_{polea} a_{polea} = 0 \Rightarrow 2T_7 = T_1$$

Cálculo de la relación de aceleraciones
Forma 1) ("intuitiva")
En el Δt en que m_1 se desplaza Δx hacia la derecha, m_2 desciende $2\Delta y$, dado que la polea móvil baja Δx y cada tramos de la soga alrededor de la polea móvil tiene que bajar Δx entonces la soga baja en total $2\,\Delta x$, que es lo mismo que baja el cuerpo 2.
$a_2 = 2\,a_1$. Aquí se tiene en cuenta que la polea fija baja la misma longitud que la masa 1, por lo tanto, en la polea móvil tienen que moverse 2 tramos de dicha longitud alrededor de la misma.

Forma 2) (analítica rigurosa)
Relaciones entre las aceleraciones: relacionamos la longitud de la soga 1 (en celeste) con las posiciones del cuerpo 1 y la polea, para obtener, derivando dos veces con respecto al tiempo, las respectivas aceleraciones.. Tengamos en cuenta que aquí hay 2 sogas con longitudes fijas l_1 y l_2. La altura h de la polea móvil es una longitud constante. En este caso se nos ocurrió poner el 0 del sistema coordenado en el piso. Lo importante es que el eje x y el y tengan la dirección y sentido de los ejes elegidos para los cuerpos 1 y 2, los cuales fueron elegidos en la dirección y sentido de las respectivas aceleraciones.



Para la soga 1 (l_1)

$$-x_1-(h-y_P)=l_1$$

derivando ambos términos respecto del tiempo

y usando $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\equiv\dot{x}$ queda $-\dot{x}_1-(0-\dot{y}_P)=0$

derivando nuevamente y usando $\frac{\mathrm{d}^2x}{dt^2}\equiv\ddot{x}$

$-\ddot{x}_1+\ddot{y}_P=0$ por lo que $\ddot{x}_1=\ddot{y}_P$ con lo que $a_1=a_p$

Para la soga 2 (l_2)

$$-(2y_p-y_2)=l_2$$

derivando ambos términos respecto del tiempo queda

$$-2\dot{y}_p+\dot{y}_2)=0$$

derivando nuevamente

$-2\ddot{y}_P+\ddot{y}_2=0$ por lo que $\ddot{y}_2=2\ddot{y}_P$ con lo que $a_2=2a_p$

Relacionando los resultados de la aceleración de la polea móvil obtenida para cada una de las sogas.

$$a_2=2a_p=2a_1$$

Esto, junto con las relaciones de las tensiones y las ecuaciones obtenidas de los DCL de los cuerpos y las poleas, da el sistema de ecuaciones necesario para resolver el problema.

$T_1=m_1a_1$ de las leyes de Newton para el cuerpo 1

$T_7-P_2=m_2a_2$ de las leyes de Newton para el cuerpo 2

$2a_1=a_2$ usando la relación entre las aceleraciones de las masas

$T_1=2T_7$ usando la relación entre las tensiones

El resultado será, en este caso

$$a_1=\frac{m_2g}{\left(\frac{m_1}{2}+2m_2\right)}=4.28\frac{m}{s^2} \qquad a_2=\frac{m_2g}{4m_1+m_2}=8.57\frac{m}{s^2}$$

$$T_1=\frac{m_1m_2g}{\left(\frac{m_1}{2}+2m_2\right)}=17{,}14\,N \qquad T_7=\frac{m_1m_2g}{(m_1+4m_2)}=8.57N$$